Определение. Старшим экспоненциальным показателем Изобова системы (1) называется величина [1]

$$\nabla(A) = \sup_{Q\in\mathcal{E}} \lambda_n(A+Q),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — старший показатель Ляпунова, а $\mathcal{E}$ — множество экспоненциально убывающих возмущений, т. е. оператор-функций $Q \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющих условию

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| < 0.$$

Для заданных $K > 0$, $m > 1$ и $\rho > 0$ обозначим через $\mathcal{F}_{K,m,\rho}$ множество непрерывных функций $f\colon \mathbb{R}^+ \times U_\rho \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\|f(t,x)\| \leqslant K\|x\|^m, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in U_\rho \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < \rho\}.$$

Далее, положим $\mathcal{F}_{K,m} = \bigcup_{\rho>0} \mathcal{F}_{K,m,\rho}$.

Теорема. *Пусть $\nabla(A) < -\alpha < 0$. Тогда для любых $K > 0$ и $m > 1$ существует такое $C > 0$, что для любой функции $f \in \mathcal{F}_{K,m}$ найдется такое $\delta > 0$, что всякое решение системы*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2}$$

удовлетворяющее условию $\|x(0)\| < \delta$, продолжается на всю полуось $\mathbb{R}^+$, и выполнена оценка

$$\|x(t)\| \leqslant C\|x(0)\|e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Таким образом, нулевое решение всякой системы (2) с $f \in \mathcal{F}_{K,m}$ экспоненциально устойчиво [2, с. 251].

Замечание. В случае, когда коэффициенты системы (1) ограничены, условие $\nabla(A) < 0$ необходимо и достаточно, чтобы у всякой системы (2) с $f \in \bigcup_{K>0,\ m>1} \mathcal{F}_{K,m}$ нулевое решение было экспоненциально устойчивым [3].

Литература

1. Изобов Н. А. *О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.

2. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

3. Изобов Н. А. *Экспоненциальная устойчивость по линейному приближению.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 8. С. 1011–1027.

МЕТОД НЕОРДИНАРНЫХ СЕМЕЙСТВ В ТЕОРИИ БЭРОВСКИХ КЛАССОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

А.Н. Ветохин

Российский государственный университет туризма и сервиса, Москва, Россия

vetokhin@front.ru

I. Множество точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова их мажорант и минорант. Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0; +\infty), \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной на полупрямой $t \in [0; +\infty)$ оператор-функцией. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное метрическое пространство. Для $k \in \{1, \ldots, n\}$ по непрерывному и ограниченному отображению

$$A : \mathcal{M} \times [0; +\infty) \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{2}$$

построим функцию

$$\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu, \cdot)). \tag{3}$$

В. М. Миллионщиковым, в случае полноты метрического пространства $\mathcal{M}$, было установлено, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ и каждого отображения (2) функция (3) в типичной по Бэру точке пространства $\mathcal{M}$ полунепрерывна сверху [1]. Напомним, что свойство называется *типичным по Бэру*, если имеется всюду плотное множество типа G_δ, состоящее из точек, обладающих этим свойством [2]. Естественно возникает вопрос о типичности полунепрерывности снизу функции (3). В работе [3], в случае $\mathcal{M} = [0, 1]$, построено такое отображение (2), что множество точек полунепрерывности снизу функции (3) пусто. Оказывается данный результат верен для очень широкого класса ляпуновских показателей.

Теорема 1. *Пусть функционал* λ, *определенный на множестве линейных систем вида* (1), *для любой ограниченной непрерывной функции* $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет равенству*

$$\lambda(fE) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau,$$

где $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— тождественное отображение. Тогда для* $\mathcal{M} = [0, 1]$ *существует такое отображение* (2), *что множество точек полунепрерывности снизу функции* $\mu \mapsto$ $\mapsto \lambda(A(\mu, \cdot))$ *пусто.*

В частности из этой теоремы вытекает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{M} = [0, 1]$ существует такое отображение (2), что множество точек полунепрерывности снизу функции

$$\mu \mapsto \lambda_k^{\max}(A(\mu, \cdot)), \tag{4}$$

$$\mu \mapsto \lambda_k^{\min}(A(\mu, \cdot)), \tag{5}$$

где $\lambda_k^{\max}(A)$ и $\lambda_k^{\min}(A)$ — минимальная полунепрерывная сверху *мажоранта* и соответственно максимальная полунепрерывная снизу *миноранта* k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемые формулами

$$\lambda_k^{\max}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\{B:\ \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_k(A + B), \quad \lambda_k^{\min}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\{B:\ \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_k(A + B),$$

пусто. Таким образом получен окончательный ответ на задачу из доклада В. М. Миллионщикова [4] о возможной всюду плотности точек полунепрерывности снизу функции (5).

Наложим на функцию (2) дополнительное ограничение

$$\lim_{\nu \to \mu} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(\nu, t) - A(\mu, t)\| = 0, \quad \mu \in \mathcal{M}, \tag{6}$$

означающее ее равномерную по $t \in \mathbb{R}^+$ непрерывность по μ. М. И. Рахимбердиев [5], в случае $\mathcal{M} = [0, 1]$, построил, при $n \geqslant 2$, такое отображение (2), удовлетворяющее условию (6), что функция (3) разрывна в каждой точке отрезка $[0; 1]$, и множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным на $[0; 1]$. Естественно возникает вопрос о существовании такого отображения (2), удовлетворяющего свойству (6), что множество точек полунепрерывности снизу функции (3) пусто.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{M} = [0, 1]$, *тогда для любого* $n \geqslant 2$ *и каждого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *найдется такое отображение* (2), *удовлетворяющее условию* (6), *что множество точек полунепрерывности снизу функции* (3) *пусто.*

II. Бэровская классификация мажорант и минорант показателей Ляпунова. В начале 80-х гг. В. М. Миллионщиков открыл новое направление в качественной теории дифференциальных уравнений: он предложил для описания зависимости ляпуновских показателей от параметров использовать классификацию Бэра разрывных функций.

В частности, он установил, что для любого отображения (2) функция (3) принадлежит второму классу Бэра, т. е. представима в виде двух поточечных пределов от непрерывных функций [6].

В дальнейшем В. М. Миллионщиковым и его учениками были получены оценки сверху для номеров бэровских классов целого ряда ляпуновских показателей. В частности, И. Н. Сергеев установил [7], что для любого отображения (2) функция (4) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$. В. В. Быков и Е. Е. Салов доказали [8], что для любого отображения (2) функция (5) принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$ (ранее это было установлено И. Н. Сергеевым [9] для трехмерного случая). В результате возник естественный вопрос о неулучшаемости полученных результатов, т. е. об адекватных оценках для тех же номеров бэровских классов снизу.

Первой работой в указанном направлении была, по всей видимости, вышеупомянутая работа М. И. Рахимбердиева, в которой установлено, что функция (3) может, вообще говоря, не принадлежать первому бэровскому классу. Из теоремы 1 и теоремы Бэра о функциях первого класса получаем, что в случае $\mathcal{M} = [0, 1]$ найдется такое отображение (2), что функция (4) не принадлежит первому бэровскому классу (ранее это было установлено в [10] для случая пространства систем вида (1), наделенного топологией компактной сходимости коэффициентов). Таким образом получен окончательный ответ на задачу из доклада В. М. Миллионщикова [11] о наименьшем бэровском классе, которому может принадлежать функция (4).

Методы же доказательства непринадлежности ляпуновских показателей второму, третьему и т. д. классам Бэра некоторое время оставались неизвестными.

Возможно, первой работой, в которой была установлена непринадлежность второму бэровскому классу ляпуновского показателя, была работа [12]. В ней доказана

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{M}$ *— множество иррациональных чисел на* $[0, 1]$ *с метрикой индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. Тогда для любого* $n \geqslant 2$ *и каждого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *найдется такое отображение* (2), *что функция (5) не принадлежит второму бэровскому классу.*

Таким образом получен окончательный ответ на задачу из доклада В. М. Миллионщикова [4] о наименьшем бэровском классе, которому может принадлежать функция (5).

III. Свойства топологической энтропии. Функционалы, представимые в виде нескольких поточечных пределов от непрерывных функций, встречаются не только в теории показателей Ляпунова, но и в теории динамических систем. Одним из таких функционалов является *топологическая энтропия* [13] динамической системы, представляющая собой скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с произвольно хорошей, но конечной точностью. Можно сказать, что топологическая энтропия описывает одним числом полную экспоненциальную сложность орбитальной структуры.

Напомним определение топологической энтропии динамической системы, порожденной непрерывным отображением компактного метрического пространства. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а $f : X \to X$ — непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $B_f(x,\varepsilon,n)$ открытый шар $\{y\in X: d_n^f(x,y)<\varepsilon\}$. Множество $E\subset X$ называется (f,ε,n)-покрытием, если

$$X\subset\bigcup_{x\in E}B_f(x,\varepsilon,n).$$

Пусть $S_d(f,\varepsilon,n)$ обозначает минимальное количество элементов (f,ε,n)-покрытия. *Топологической энтропией* динамической системы [14, с. 120], порожденной непрерывным отображением f называется величина

$$h_{\mathrm{top}}(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(f,\varepsilon,n).$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному по совокупности переменных отображению

$$f:\mathcal{M}\times X\to X, \tag{7}$$

образуем функцию

$$\mu\mapsto h_{\mathrm{top}}(f_\mu(\cdot)). \tag{8}$$

В монографии [14, с. 501] установлено, что в случае $X=[0,\,1]$ функция (8) полунепрерывна снизу. Вообще же говоря (при произвольном X), функция $h_{\mathrm{top}}(\cdot)$ может и не быть полунепрерывной снизу. Рассмотрим, к примеру, семейство отображений $f_\mu: X_1\to X_1$, где

$$X_1=\{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqslant 1\},\quad f_\mu(z)=\begin{cases}0, & \text{если}\ \ z=0;\\ \mu z^2/|z|, & \text{если}\ \ z\neq 0,\end{cases}\quad \text{где}\ \ \mu\in[0;\,1].$$

При $\mu\in[0;\,1)$ выполнено равенство $h_{\mathrm{top}}(f_\mu)=0$, а при $\mu=1$ — неравенство $h_{\mathrm{top}}(f_\mu)\geqslant\ln 2$ [15]. Таким образом, функция $F(\mu)=h_{\mathrm{top}}(f_\mu):[0;\,1]\to\mathbb{R}$ не является полунепрерывной снизу в точке $\mu=1$.

В работе [15] установлено, что для любого метрического пространства $\mathcal{M}$ и каждого отображения (7), удовлетворяющего условию Липшица по $x\in X$ при всяком фиксированном значении $\mu\in\mathcal{M}$, функция (8) принадлежит второму бэровскому классу, а в случае полноты метрического пространства $\mathcal{M}$ функция (8) в типичной по Бэру точке полунепрерывна снизу. Справедливы более общие результаты

Теорема 4. *Для любого отображения* (7) *функция* (8) *принадлежит второму классу Бэра на пространстве* $\mathcal{M}$.

Теорема 5. *Если* $\mathcal{M}$ *— полное метрическое пространство, то для любого отображения* (7) *в типичной по Бэру точке пространства* $\mathcal{M}$ *функция* (8) *полунепрерывна снизу.*

Оказывается, что, вообще говоря, нельзя заменить второй бэровский класс в теореме 4 на первый, а полунепрерывность в теореме 5 на непрерывность [15].

Теорема 6. *Пусть* $\mathcal{M}=X$ *— канторово множество на* $[0,\,1]$ *с метрикой индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. Тогда для любого положительного числа* $K>1$ *найдется такое отображение* (7), *удовлетворяющее условию Липшица по* $x\in X$ *с константой* K *при всяком фиксированном значении* $\mu\in\mathcal{M}$, *что функция* (8) *всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу.*

Литература

1. Миллионщиков В. М. *Типичное свойство показателей Ляпунова* // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 2. С. 203–217.

2. Бэр. Р. *Теория разрывных функций.* М.–Л.: ГТТИ, 1932.

3. Ветохин А. Н. *О множестве точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова линейных систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 12. С. 1669–1671.

4. Миллионщиков В. М. *Задачи о минорантах показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2014–2015.
5. Рахимбердиева М. И. *О бэровском классе показателей Ляпунова* // Матем. заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 925–931.
6. Миллионщиков В. М. *Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408–1416.
7. Сергеев И. Н. *Класс Бэра максимальных показателей линейных систем* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1574.
8. Быков В. В., Салов Е. Е. *О классе Бэра минорант показателей Ляпунова* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 2003. № 1. С. 33–40.
9. Сергеев И. Н. *К задаче о классе Бэра минорант показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1600–1601.
10. Ветохин А. Н. *К бэровской классификации остаточных показателей* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1039–1042.
11. Миллионщиков В. М. *Нерешенная задача о мажорантах показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1457.
12. Ветохин А. Н. *Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1313–1317.
13 Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H. *Topological entropy* // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 114. No 2. P. 309–319.
14. Каток А. Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем.* М.: Факториал, 1999.
15. Ветохин А. Н. *О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем* // Матем. заметки. 2013. Т. 93. Вып. 3. С. 347–356.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С БЛОКАМИ НЕПОЛНОГО РАНГА

А.К. Деменчук

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
demenchuk@im.bas-net.by

В 30-х годах прошлого века в одном из ряда исследований параметрического возбуждения, проводимых под общим руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, было обнаружено весьма значительное отклонение реальных характеристик от расчетных. В частности, скорость вращения электромотора оказалась не синхронна с частотой тока питания. Как выяснилось, такое непривычное с точки зрения обычной электротехники явление обусловлено реакцией вращающейся механической системы на параметрически связанную с ней электрическую колебательную систему. В результате анализа системы, состоящей из синусоидального источника напряжения, цепи питания с включенной в нее некоторой емкостью для компенсации переменной индуктивности мотора, Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [1], в отличие от обычного параметрического возбуждения, которое имело место только при целочисленном отношении частот, была продемонстрирована новая своеобразная трансформации частот, находящихся практически в любом отношении с частотой изменения параметров системы.

Тем не менее при изучении периодических решений дифференциальных систем еще долгое время предполагалось, что периоды самой системы и ее решений всегда находятся в рациональном отношении. Только в 1950 г. Х. Массера показал возможность существования иррационального отношения периодов решения и самой системы [2]. Такие периодические решения и описываемые ими колебания названы сильно нерегулярными [3]. Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями,